ترمو دینامیک مواد 3.00

نمونه سؤال برای هفته سوم

نمونه سوال 3.1

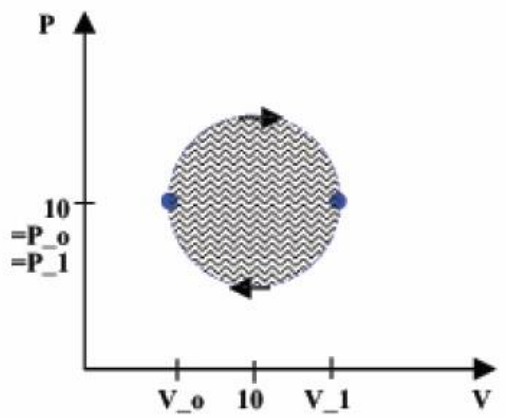
یک مدل از گاز ایده آل، با حالت اولیه V=5L ,P=10 atm به صورت برگشت پذیر و ساعتگرد، اطراف یک مسیر دایره ای $(P-10)^2+(V-10)^2=25$ قرار دارد. کار انجام شده توسط گاز را محاسبه کنید، تغییر در انرژی درونی گاز و مقدار ماکسیمم و مینیمم گاز را در طول یک چرخه ی کاری به دست آورید. اگر تعداد مول های گاز برای یک چرخه p-v یکسان دو برابر شود، این نتیجه چه تغییری خواهد کرد.

جواب 3.1

انرژی درونی یک تابع حالت است و تنها به حالت اولیه و نهایی سیستم بستگی دارد. و همچنین این یک سیستم بسته است بنابراین تغییر در انرژِی درونی برابر صفر است.

دو راه برای محاسبه ی کار انجام شده در طول یک چرخه وجود دارد. راه حل اول حل عددی $\int PdV$ است، و راه دوم محاسبه ی مساحت زیر منحنی به صورت شماتیک می باشد. $(P-10)^2+(V-10)^2=25$ معادله یک چرخه در صفحه ی p-v با مرکز (10,10) و شعاع 5 می باشد. حالت اولیه کمترین حجم ممکن برای سیستم (V_0,P_0) است.

www.iran-mavad.com
مرجع تخصصی مهندسی مواد و متالورژی



شکل 1: نمودار p - v برای چرخه کاری.

ابتدا باید P=P(v) را برای محاسبه انتگرال بیابیم. $P = 10 \pm \sqrt{25-(V-10)^2}$

که علامت مثبت متناظر با نیمه بالای دایره $(P_+(V))$ و علامت منفی متناظر با نیمه پایین $(P_-(V))$ می باشد. حال اگر $V' = V - 10$ باشد.

$$W_s = \int P dV$$

$$W_s = \int_{V_0=5}^{V_1=15} P_+(V)dV + \int_{V_1=15}^{V_0=5} P_-(V)dV$$

$$W_s = \int_{V_0'=-5}^{V_1'=5} 10 + \sqrt{25 - V'^2}dV' + \int_{V_1'=5}^{V_0'=-5} 10 - \sqrt{25 - V'^2}dV'$$

$$W_s = \frac{25}{2}(\pi + 8) + \frac{25}{2}(\pi - 8) = 25\pi L \cdot atm$$

با این روش کار انجام شده توسط سیستم برابر است با $25\pi * 101.3J = 7956J = 25\pi L.atm$.

روش دوم شامل محاسبه مساحت زیر منحنی، یک دایره ای با شعاع 5 است. بنابراین مساحت برابر $25\pi L.atm$ می باشد. در این روش کار انجام شده توسط سیستم برابر است با $7956J$.

دمای ماکسیمم و مینیمم را می توان از قانون گاز ایده آل برای یک مول از گاز به دست آورد $PV = RT$ T_{max} هنگامی که (PV) ماکسیمم است و T_{min} هنگامی که (PV) مینیمم است، نتیجه

www.iran-mavad.com
مرجع تخصصی مهندسی مواد و متالورژی

می شوند. اگر $P' = P - 10$ و $V' = V - 10$ بنابراین در هنگامی که $P'V'$ اکسترمم است، PV نیز اکسترمم است

$$P'V' = f(P'(V'), V') = \pm\sqrt{25 - V'^2}V'$$
$$\frac{df}{dV'} = 0 = \pm\sqrt{25 - V'^2} \pm V'\frac{1}{2}\frac{-2V'}{\sqrt{25 - V'^2}}$$
$$0 = \pm\left[\frac{25 - V'^2 - V'^2}{\sqrt{25 - V'^2}}\right]$$

اکسترمم به ازای $V' = \pm\sqrt{\frac{25}{2}}$ می باشد، آزمایش یا بررسی علامت مشتق دوم برای ماکسیمم $\frac{d^{2F}}{dV^2} \succ 0$، و برای یک مینیمم $\frac{d^{2F}}{dV^2} \prec 0$ که نتایج زیر را می دهد.

[h]	V'	P'	V	P
max	$\sqrt{\frac{25}{2}}$	$\sqrt{\frac{25}{2}}$	$10 + \sqrt{\frac{25}{2}}$	$10 + \sqrt{\frac{25}{2}}$
min	$-\sqrt{\frac{25}{2}}$	$-\sqrt{\frac{25}{2}}$	$10 - \sqrt{\frac{25}{2}}$	$10 - \sqrt{\frac{25}{2}}$

که به $T_{\max} = (PV)_{\max}/R = 2203K$ و $T_{\max} = (PV)_{\max}/R = 502K$ منجر می شود.

اگر تعداد مول ها دو برابر شود کار انجام شده توسط سیستم هنوز برابر است با w = 7956J اما دمای مینیمم و ماکسیمم به اندازه ی فاکتور دو از $T = (PV)/R$ و $T_{\max} = 1102K$ و $T_{\min} = 251K$ کاهش می یابد.

نمونه سؤال 3.2

یک مول گاز ایده آل در $25^\circ C$ و $1atm$ فرآیند برگشت پذیر زیر را متحمل می شود.

1- انبساط همدما به $0.5atm$ و سپس

2- انبساط هم فشار هم فشار به $100^\circ C$ و سپس

3- انقباض همدما به $1atm$ و سپس

4- انقباض هم فشار به $25^{\circ}C$

آنگاه سیستم فرآیندهای چرخه ای زیر را انجام می دهد:

1-انبساط هم فشار به $100^{\circ}C$ *و سپس*

2-کاهش فشار به ازای $Patm$ *در حجم ثابت و سپس*

3-انقباض هم فشار $Patm$ *به* $24.5L$ *و سپس*

4-افزایش فشار در حجم ثابت به $1atm$

مقدار P *را که کار انجام شده بر روی گاز در چرخه اول را انجام می دهد محاسبه کنید، که با کار انجام شده توسط گاز در چرخه دوم برابر است.*

جواب 3.2

برای یک مول گاز ایده آل $PV = RT$ و $W = \int PdV$ که W کار انجام شده توسط گاز است. سه نوع فرآیند در اینجا اتفاق می افتد و کار باید بدین گونه محاسبه شود.

1.برای یک فرآیند همدما (T ثابت):

2.برای یک فرآیند هم فشار (P ثابت):

3.برای یک فرآیند با حجم ثابت (یکی از فرآیند های هم حجم) w=0 می باشد ولی فشار و دما تغییر خواهند کرد.

www.iran-mavad.com
مرجع تخصصی مهندسی مواد و متالورژی

با شروع از خلاصه کردن تبدیل گاز با ثبت T,P,V قبل و بعد از هر فرآیندی، در لیتر، اتمسفر و کلوین و همچنین شکل کار انجام شده توسط سیستم داریم.

T_0	P_0	V_0	T_1	P_1	V_1	W_i
298	1	.	298	0.5	.	$W_1 = RT\ln\frac{P_0}{P_1}$
298	0.5	.	373	0.5	.	$W_2 = R(T_1 - T_0)$
373	0.5	.	373	1	.	$W_3 = RT\ln\frac{P_0}{P_1}$
373	1	.	298	1	.	$W_4 = R(T_1 - T_0)$
298	1	.	373	1	V_u	$W_1' = R(T_1 - T_0)$
373	1	V_u	T_3	P_u	V_u	$W_2' = 0$
T_3	P_u	V_u	T_4	P_u	24.5	$W_3' = R(T_1 - T_0)$
.	P_u	24.5	.	1	24.5	$W_4' = 0$

برای فرآیند برگشت پذیر اول کار انجام شده توسط سیستم برابر است با $W = \sum_{i=1}^{4} W_i$

$$W = \sum_{i=1}^{4} W_i = 298R\ln 2 + R(373 - 298) + 373R\ln 0.5 + R(298 - 373)$$

$$W = (298 - 373)R\ln 2 = -75R\ln 2$$

برای فرآیند چرخه ای دوم کار انجام شده توسط سیستم برابر است با $W' = \sum_{i=1}^{4} W_i'$

$$W' = \sum_{i=1}^{4} W_i' = R(373 - 298) + 0 + R(T_4 - T_3) + 0$$

$$W' = 75R + R(T_4 - T_3)$$

بنابراین باید دمای مجهول را به دست آوریم. $T = PV/R$ و $V = RT/P$.

$$T_3 = \frac{P_u}{R}V_u = \frac{P_u}{R}\frac{373R}{1} = 373P_u$$

$$T_4 = \frac{P_u 24.5}{R}$$

Now $W' = 75R + R(\frac{P_u 24.5}{R} - 373P_u) = 75R + RP_u(\frac{24.5}{R} - 373)$.

www.iran-mavad.com
مرجع تخصصی مهندسی مواد و متالورژی

محدودیت هایی که کار انجام شده بر روی گاز در چرخه اول با کار انجام شده توسط گاز در چرخه دوم برابر است معادل می باشند با

$$W + W' = 0 = -75R\ln 2 + 75R + RP_u\left(\frac{24.5}{R} - 373\right)$$

$$P_u = \frac{75(\ln 2 - 1)}{\frac{24.5}{R} - 373}$$

In the above $R = 8.314\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{moleK}} \cdot \frac{1\mathrm{atm}}{1.01310^5\mathrm{Pa}} \cdot \frac{10^3\mathrm{L}}{\mathrm{m}^3} = 0.08207\frac{\mathrm{L{\cdot}atm}}{\mathrm{moleK}}$. So $P_u = 0.3\mathrm{atm}$.

www.iran-mavad.com
مرجع تخصصی مهندسی مواد و متالورژی